К билетам 26- 28.

Дисперсия – явление прохождения света через среду.

Закон Бургера, комплексные величины.

Будем рассматривать однородную изотропную среду (даже в ней своих приколов хватает, а уж что творится в анизотропных…)

Итак, выведем, как ведёт себя в поле в таких средах. Напишем уравнения Максвелла. Так как в таких хороших средах **D**=ε_0 ε**E и B**=μ_0 μ**H,** уравнения Максвелла примут простой вид:

(нумерация из учебника Алешкевича, поэтому такая странная):

$$\mathrm{rot}\,H = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E \,;$$

$$\mathrm{rot}\,E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (10)$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon_0 \varepsilon E = \rho \quad (11)$$

$$\mathrm{div}\,\mu_0 H = 0 \quad (12)$$

В однородной среде $\rho = 0$

Слагаемое σ**E** в первом уравнении – это просто плотность тока **j** (помните дифференциальный закон Ома?), а σ – проводимость.

Обратите внимание, что по сравнению с вакуумом появились целые две величины: диэлектрическая проницаемость ε и та самая проводимость σ. И если первая ничего особо не поменяет (разве что скорость замедлит), то вторая (связанная с тем, что в среде могут возникнуть токи), причинит нам немало попаболи.

ρ – плотность свободных зарядов – положим равным 0, т.е. среда в среднем незаряжена.

Решаем:

Применим rot к обеим частям (10):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = -\mu_0 \operatorname{rot}\frac{\partial H}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} H$$

подставляем (9):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = -\mu_0\left(\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

Т.к. $\operatorname{div} E = 0$, то $\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \Delta E$

$$\Delta E = \frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{E} - \sigma\mu_0\dot{E} = 0$$

Оказывается, что волна вдоль любого направления

$$E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$$

Будет являться решением. Давайте это проверим, а заодно найдём ω и k.
Раз у нас волна вдоль оси z, то оператор треугольника (лапласиан) будет просто d^2/dz^2.
Вычислим частные производные $E(z,t)=E_0\exp(i(\omega t-kz))$ по t и x:

$$\frac{d^2E}{dz^2} = E(z,t)\cdot(-k^2) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = E(z,t)\cdot(-\omega^2)$$

$$\frac{dE}{dt} = E(z,t)\cdot(-i\omega)$$

Подставляем эти частные производные в уравнение тремя фотографиями выше. Сразу же сокращаем на E(z,t):

$$-k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2}\cdot(-\omega^2) - \sigma\mu_0\cdot(-i\omega); \quad k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^2 + i\cdot\sigma\mu_0\omega$$

Давайте проанализируем. Если $\varepsilon=1$ и $\sigma=0$ (вакуум), то $k=\omega/c$ – ожидаемо. Если $\varepsilon>1$, но $\sigma=0$, k по-прежнему действительно, просто длина волны (которая вычисляется как $2\pi/k$) и скорость волны (пропорциональна длине волны) уменьшатся в sqrt(ε) раз. Кажется, мы доказали, что показатель преломления n – это квадратный корень из ε.
Но если σ нулю не равно, начинается комплексность! k становится комплексным.
Сперва давайте выведем закон Бугера-Ламберта-Бера – закон поглощения излучения веществом (помните 401-й прак и его методичку?)
Пусть k = Re k + i*Im k. Тогда

$$E(z,t)=E_0\exp(i(\omega t-kz))=E_0\exp(i\omega t)*\exp(-ikz)=$$
$$E_0\exp(i\omega t)*\exp(-iz(\mathrm{Re}\,k + i*\mathrm{Im}\,k))=$$
$$E_0\exp(i\omega t)*\exp(-iz\mathrm{Re}\,k)*\exp(z*\mathrm{Im}\,k)=$$
$$E_0\exp(i\omega t-z*\mathrm{Re}\,k)*\exp(z*\mathrm{Im}\,k).$$

Что мы получили? Обычную волну с привычным действительным волновым вектором k, но вдобавок ещё возник множитель exp(z*Im k). В зависимости от знака Im k амплитуда с ростом z или экспоненциально растёт, или экспоненциально убывает. Конечно, убывание значительно более физично: проходя, волна вызывает шквал вынужденных излучений, которые жрут её энергию.
Экспериментально мы меряем интенсивность, которая прямо пропорциональна квадрату E, поэтому домножим аргумент экспоненты на два:
I(z,t)=I(от волны в вакумме с частотой ω)*exp(-2z*(-Imk)).
Данное утверждение про интенсивность и носит название закона Бугера-Ламберта-Бера.
Резюме: действительная часть комплексного вектора k ответственна за привычное колебание по косинусу-синусу по координате, а мнимая даёт убывание. Это можно понять, ещё раз взглянув на формулу:

$$\breve{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)]$$

Действительная часть домножится на i, станет мнимой и даст колебания E по синусу-косинусу. А вот мнимая после домножения на i и станет экспонентой с действительным аргументом, которая и даст нам экспоненциальное затухание.

Однако нам всё-таки хотелось бы узнать ту самую Im k, чтобы понять, как быстро излучение поглощается средой. У нас для этого есть

$$-k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot (-\omega^2) - \sigma\mu_0 \cdot (-i\omega); \quad k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^2 + i \cdot \sigma\mu_0\omega$$

Осталось извлечь из этого всего корень квадратный.
Алешкевич пишет, что

-Im k = $\frac{\omega}{c}\chi$

А вот χ выражается по-говноформульски:

$$\chi^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\tilde{\varepsilon}^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{\varepsilon_0\omega^2}} - \tilde{\varepsilon}\right).$$

Где ε тоже комплексное и выражается из соотношения εω=ck (k, напомним, тоже комплексное).

И Алешкевич, и Русаков вводят комплексные диэлектрическую проницаемость и показатель преломления. Не уверен, что это прям нужно (более того, что ε/k не равно Re ε/Re k, так что даже мотив «спасти формулы» здесь не работает). Но профессорам виднее. Наверное.

Формула Клаузиса-Моссоти, она же формула Лоренца-Лоренца.

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{Na}{3}.$$

N – концетрация зрядов.
a(ω) – поляризуемость, т.е. отношение дипольного момента молекулы к напряжённости, на данной частоте ω.
Ну и ε тогда тоже функция ω.
Формула была в курсе элмага, но без зависимости от частот ω, для постоянного электрического поля. Теперь вот ε комплексное:

$$\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{\varepsilon} - i\frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0\omega}$$

Действительная часть – ε здорового человека, а мнимая – как раз зависит от ω.
Именно такое комплексное ε входит с формулу с комплексным k εω=ck

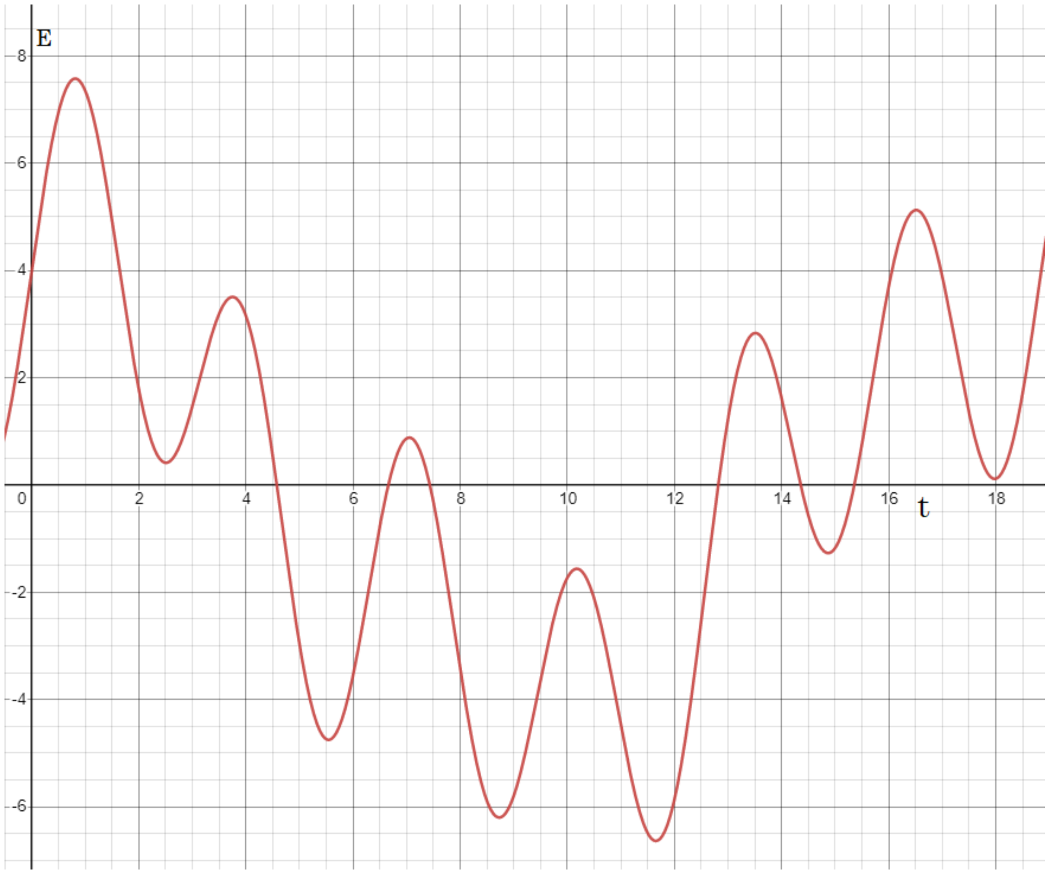
Распространение квазимонохроматического света. Групповая скорость.

Теперь давайте рассмотрим случай, когда нет поглощения. Например, частота

Но теперь у нас будет на линейно поляризованный монохроматический свет, как было раньше, а любая волна. Нас будет интересовать её распространение в среде.

Кстати, одна из проблем, которую нам предстоит решить – это определение скорости. Если раньше проблем с определением скорости волны не было ($v=c/n$), то теперь они появляются. Ведь если движется вдоль оси синус, то мы без труда можем определить его скорость, и придумать какое-то другое определение для скорости синуса будет затруднительно.
А теперь представим, что у нас движутся несколько волн, да ещё зависимость $n(\omega)$ неконстантная (а она на самом деле не константа). Тогда каждая движется со скоростью $c/ n(\omega)$, и у каждой частоты она своя. Вопрос: какая частота будет у ВСЕЙ волны – суммы по всем частотам? Согласитесь, вопрос нетривиальный.

Прежде чем думать о скорости, сначала давайте решим вопросу о распространении света вообще.
Итак, у нас есть источник, который излучает вдоль оси z излучение, которое как-то зависит от времени $E_0(t)$. Зависит не по синусу, не по косинусу, а как придётся. Да хоть так:



На этом подходы Русакова и Алешкевича отличаются. В методичке я опишу оба, но мне Алешкевича больше нравится, да и проще он. **Начнём с вывода Русакова.**

Представим эту байду как сумму излучений на различных частотах ω с разной интенсивностью:

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_0(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \text{ где } E_0(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t')e^{-i\omega t'}\,dt'.$$

Далее каждое излучение на частоте ω нам подвластно – этот синус будет двигаться вправо со скоростью c/n(ω). Мы можем написать возмущение, которое даёт сигнал с частотой ω и амплитудой $E_0(\omega)$ (формулу для неё см.выше) в любой точке z:

$$E(i\omega, z) = E_0(i\omega)e^{-ik(\omega)z}.$$

(напомним, что при отсутствии токов и всякой комплексности k(ω)= ω*n(ω)/c= ω*v(ω)). А далее интегрируем:

$$E(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(i\omega,z)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_0(t')e^{-ik(\omega)z}e^{i\omega(t-t')}\,dt'\,d\omega.$$

Второе равенство получается путём подстановок первого интеграла.

Чтобы дальше продвинуться, нужно знать точный вид k(ω).

Рассмотрим для примера квазимонохроматический свет: спектральная плотность S, при этом полуширина Δω гораздо меньше центральной циклической частоты ω_0. Данный свет очень часто встречается, поэтому его рассмотрение нам пригодится. Как он ведёт себя в различных средах?
То, что спектральная плотность спадает по нормальному распределению, нам совершенно не важно, нам потребуется то, что он узкий, т.е. ω в таком свете меняется незначительно, что позволяет нам разложить k(ω) в ряд Тейлора. Сделаем это до третьего слагаемого включительно:

$$k(\omega) = k_0 + k_0'(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}k_0''(\omega-\omega_0)^2,$$

Где $k_0=k(\omega_0)$.
Рассмотрим т.н. среды с дисперсией первого порядка. Это такие среды, для которых второе слагаемое (с первой производной) гораздо больше третьего (с второй производной), и следовательно, третьим слагаемым можно пренебречь.
То есть

$k(\omega)=k(\omega_0)+(\omega-\omega_0)*dk/d\omega$ в точке ω_0.
(Заметим, что k прямо пропорционально n:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega).$$

так что то, что $k(\omega)$ – почти линейная функция, соответствует тому, что $n(\omega)$ – почти константа в некоторой окрестности ω_0. А вот вне этой окрестности – да какая угодно зависимость).
Подставляем $k(\omega)$ в интеграл и вычисляем его:

$$E(t,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i(k_0 + k_0'(\omega-\omega_0))z} e^{i\omega(t-t')} \, d\omega \, dt =$$
$$e^{-i(k_0 - k_0'\omega_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(E_0(t') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-k_0'z+t+t')} \, d\omega \right) dt' =$$
$$e^{-i(k_0 - k_0'\omega_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') \delta(t' - (t - k_0'z)) \, dt' = e^{-i(k_0 - k_0'\omega_0)z} E_0(t - k_0'z);$$
$$I(t,z) = \frac{1}{2} \left\langle |E(t,z)|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle |E_0(t - k_0'z)|^2 \right\rangle = I_0(t - k_0'z).$$

Первое равенство (с первой строчки на вторую): константу за оба интеграла, также вынесли всё, что не зависит от ω, из-под интеграла по dω.
Второе равенство: самый сложный момент. Вот этот интеграл

$$\int_{-8}^{8} \exp(iaw)\, dw$$

по Русакову, является дельта функций. Наверное, да.
Третье равенство: дельта-функция очень хорошо и просто интегрируется, тут всё просто.
Четвёртая строчка: Русаков ещё вдобавок вывел интенсивность.

Получаем, что напряжённость зависит от z и t как произведение мнимой экспоненты – функции только лишь z (представим себе – это какой синус) на бегущую волну от аргумента $t - dk/d\omega$(в точке ω_0)$*z$. Хочется сказать, что $1/(dk/d\omega$(в точке ω_0)) – это какая-то скорость. Она называется групповой и обозначается как u.

А вот, для сравнения, **вывод Алешкевича.** Как по мне, он более понятен:

$$E(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp\left[i(\omega t - kz)\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp\left[i(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)z\right] d\omega \exp\left[i(\omega_0 t - k_0 z)\right] =$$

Если мы подставим $k(\omega)=k_0+1/u*(\omega-\omega_0)$, то получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp\left[i(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{z}{u}\right)\right] d\omega \ \exp\left[i(\omega_0 t - k_0 z)\right]$$

Или же

E_0 от аргумента $\left(t - \frac{z}{u}\right)$, $*$ $\exp\left[i(\omega_0 t - k_0 z)\right]$

Прикольно вышло: имеем произведение двух волн: одной со скоростью ω_0/k_0, т.е. с обычной скоростью c/n, а другая со скоростью u, то есть dω/dk. Эта скорость u и называется групповой.

Представим себе у графика E(z) максимум. Предположим, что мы сели на это «седло» в некоторый момент и запустили время. Скорость, с которой мы будем на максимуме-седле двигаться, и есть групповая скорость.

Замечания:
1) групповая скорость имеет смысл только для прозрачных сред (без токов и затухания!)
2) групповая скорость постоянна только для диспергирующих сред первого порядка (где k(ω) имеет почти линейный вид, по крайней мере, в окрестности ω_0).

Найдём связь между групповой скоростью и показателем преломления. Вспоминаем, что

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega).$$

Поэтому получаем величину, обратной групповой скорости, дифференцированием произведения:

$$\frac{dk}{d\omega}=\frac{1}{c}\left(n(\omega)+\omega\cdot\frac{dn}{d\omega}\right).$$

И переворачиваем дробь. Вообще тут бы после всех формул не помешало бы подставить «в подстановке в ω_0», так что держите это в уме.

$$u=\frac{d\omega}{dk}=\frac{c}{n(\omega)+\omega\cdot\frac{dn}{d\omega}}.$$

Поделим числитель и знаменатель на n(ω):

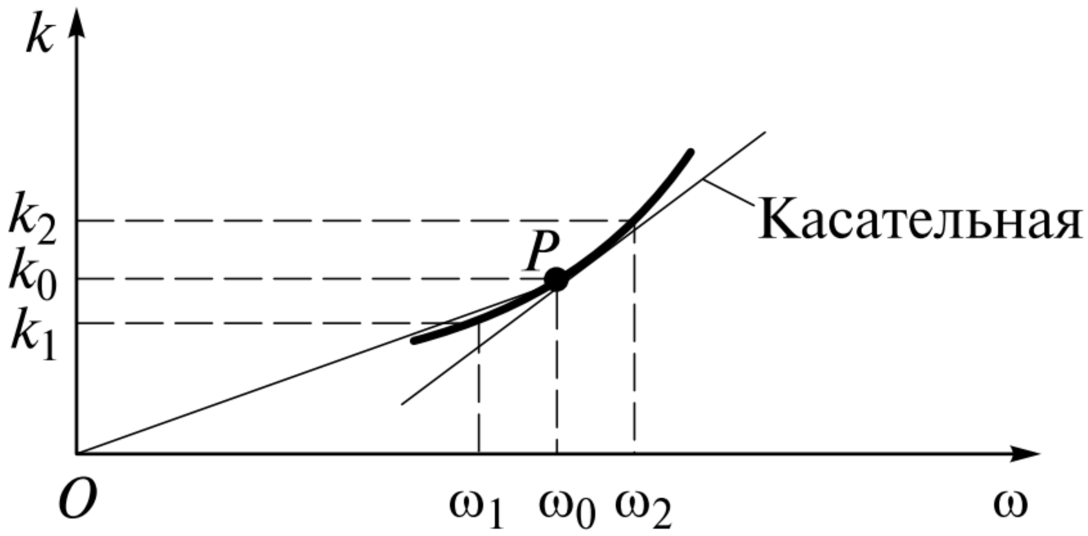
$$\frac{v(\omega)}{1+\frac{\omega}{n(\omega)}\cdot\frac{dn}{d\omega}}.$$

Ба, так в числителе появилась c/n(ω). Это что такое? В подстановке в ω_0. $c/n(\omega_0)$ – это та скорость (она называется фазовой), которую мы бы получили, если бы считали свет монохроматическим с циклической частотой ω_0. Как мы видим, она не равна групповой скорости!

А что больше – v или u? Зависит от знака $dn/d\omega$. Как правило, он плюс и $u<v$ (т.н. зона нормальной дисперсии). Если $v>u$, то это т.н. зона аномальной дисперсии, но Алешкевич говорит, что это не норма, да и поглощение там большое, так что говорить о какой-либо групповой скорости не приходится.

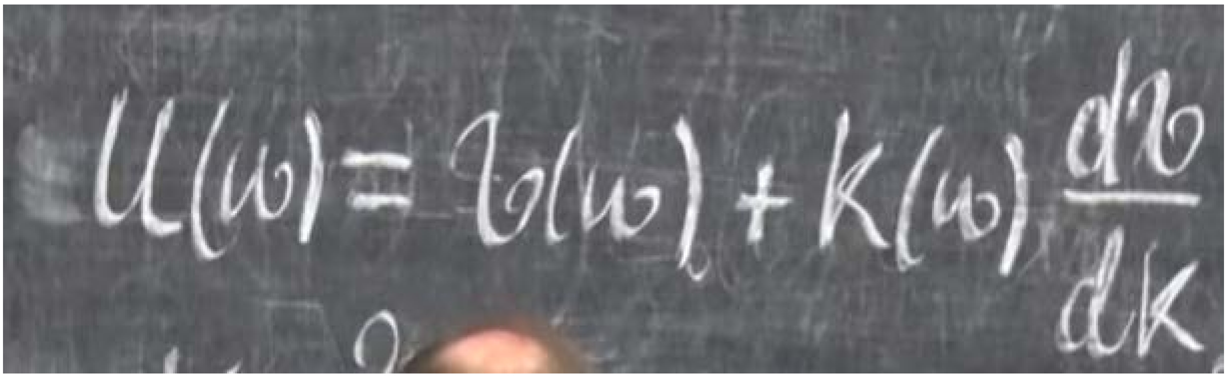
В дальнейшем под $u(\omega)$ будем понимать $dk/d\omega_1$(в точке ω), т.е. ω_0 бывшая константой, становится аргументом. Мы уже узкий пучок для каждой частоты взять можем? Для каждой.

Нарисуем график:



Фазовая скорость в ω_0 - это мы взяли ω_0, $k(\omega_0)$ и поделили их друг на друга. Т.е. это тангенс наклона прямой, соединяющей (0;0) и (ω_0, $k(\omega_0)$)
А вот угловая скорость – это тангенс наклона касательной.
То есть, если $k(\omega)$ – прямая пропорциональность (т.е. $n(\omega)$ – const), то фазовая скорость везде равна групповой. Но если $n(\omega)$, как на рисунке медленно растёт, то константой мы можем положить её (и, следовательно, аппрокисимировать линейным участком $k(\omega)$) только на маленьком промежутке ширины квазимонохроматического излучения, что мы и сделали. В итоге мы получили, что истинная скорость равна не $c/n(\omega_0)$, а производной.

Получим ещё одно соотношение между $v(\omega)$ и $u(\omega)$.
$k(\omega)= \omega/v(\omega)$, $\omega=k(\omega)*v(\omega)$
Продифференцируем последнее равенство по k:
$d\omega/dk=dk(\omega)/dk*v(\omega)+k(\omega)*dv(\omega)/dk(\omega)$
Слева стоит u по определению групповой скорости, ну а $dk/dk=1$.
$u= v(\omega)+k(\omega)*dv(\omega)/dk$



(лысина Русакова просто шикарна)
Заметим, что k обратно пропорциональна λ (их произведение 2π и оно постоянно).
Ну а раз постоянно произведение, то постоянна сумма логарифмов:
$\ln k + \ln \lambda = \mathrm{const}$
$d \ln k + d \ln \lambda = 0$
$dk/k + d\lambda/\lambda = 0$
У нас как раз есть dk/k, заменяем его на -dλ/λ. Получаем

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

Это и есть формула Релея (без джинсов).

А что будет, если нельзя пренебречь вторым слагаемым в разложении k? Это значит, что даже в небольшой окрестности нельзя считать k(ω) линейной (n(ω) константой). Надо учесть третье слагаемое:

$$k(\omega) = k_0 + k_0'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k_0''(\omega - \omega_0)^2,$$

Заметим, что подстановка k(ω) в интегралы Фурье чревата суицидом (там и для линейной зависимости k от ω всё было сложно), поэтому не будем этого делать.
Заметим, что из-за сильного изменения n(ω) даже на небольшом участке частот приведёт к тому, что одни компоненты волны будут бежать сильно быстрее других, и импульс начнёт сильно менять свою форму.
Разница времён хода двух крайних частот, возникающая на расстоянии z, равна

$$\Delta t = \frac{z}{u_2} - \frac{z}{u_1}.$$

Также

Чем больше координата z, тем больше время запаздывания Δt. На некотором расстоянии L_0, получившем название *дисперсионной длины*, время Δt достигнет начальной длительности импульса τ_0:

$$\Delta t = \frac{L_0}{u_2} - \frac{L_0}{u_1} = \tau_0. \qquad (16.24)$$

Следовательно, на этом расстоянии длительность импульса станет приблизительно вдвое больше начальной. Увеличение длительности импульса с пройденным расстоянием называется *дисперсионным расплыванием импульса*. Помимо этого импульс из спектрально ограниченного превращается в частотно-модулированный (фазово-модулированный). В самом деле, частота головной части будет близка к ω_1, а хвостовой — к ω_2.

Частотно модулированный – то есть спектральная плотность в крайние моменты времени будет близка к дельта-функции. Действительно, при малых t большие частоты ещё не успеют «подъехать», а при больших t они уже «уедут».

Оценим из (16.24) дисперсионную длину. Для этого используем очевидное приближенное равенство

$$\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_2} - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_1} = \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} \Delta\omega \sim \frac{k_2}{\tau_0}. \qquad (16.25)$$

Подставив (16.25) в (16.24), получим

$$L_0 \sim \frac{\tau_0^2}{k_2}. \qquad (16.26)$$

Следует отметить, что в области нормальной дисперсии показателя преломления, в которой и происходит дисперсионное расплывание, величина k_2 может быть как положительной, так и отрицательной. В современной литературе принята следующая терминология: если $k_2 > 0$ (см. рис. 16.6), то, согласно (16.20), $\frac{du}{d\omega} < 0$. В этом случае *дисперсия групповой скорости* называется *нормальной*. Если $k_2 < 0$, то $\frac{du}{d\omega} > 0$, и *дисперсия групповой скорости аномальная*.

В обоих случаях происходит дисперсионное расплывание на характерной длине

$$L_0 \sim \frac{\tau_0^2}{|k_2|}. \qquad (16.27)$$

Фазовая модуляция различна: при $k_2 > 0$ частота возрастает от начала к концу импульса, а при $k_2 < 0$ она, наоборот, уменьшается.

Сделаем какие-нить численные оценки. Как сказал профессор Русаков, характерное значение второй производной k в СИ – $3 \cdot 10^{-26}$, длина импульса – пикосекунды (10^{-12} с). Тогда дисперсионная длина – 5 метров. То есть если приёмник на расстоянии трёх метров, всё будет нормально, импульс сохранится. Но если далеко – импульс продиспергирует - мама родная не узнает, и вся информация будет просрана. Именно это обстоятельство ограничивает длину всевозможных волноводов.